

Determinant Notes

Definition - the determinant of a matrix is a **real number**

To have a determinant, a matrix must be a **square matrix**

Determinant of a 2 x 2 Matrix: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3Ds:

Determinant, Diagonals, Difference

Example:

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (7 \cdot 3) - (2 \cdot 2)$
 $21 - 4 = 17$

(2) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - (-10)$
 $3 - (-10) = 13$

Determinant of a 3 x 3 Matrix: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

Solving equations involving determinants:

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 2x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$

(2) $\begin{vmatrix} x & x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 8$

(3) $\begin{vmatrix} 4 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -3 & 5 \end{vmatrix} = 15$

Determinant of a 3x3 Matrix:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \\ g & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & g \\ b & h \\ c & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ c & e \\ f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & g \\ c & h \\ f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & g \\ e & h \\ f & i \end{vmatrix}$$

$$(aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2 \cdot 0 \cdot 4 + -1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot -2 \cdot 2) - (-2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot -2 \cdot -1) + (1 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot -2 \cdot -1) - (2 \cdot 1 \cdot 4 + -2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot -2 \cdot 2) + (2 \cdot 1 \cdot 1 + -1 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot -2 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot 1 + -1 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot -2 \cdot 2) + (2 \cdot 1 \cdot 1 + -1 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot -2 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot 1 + -1 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot -2 \cdot 2)$$

$$(-13) - (12) = -25$$

2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(2 \cdot 1 \cdot -3 + -3 \cdot -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2) - (2 \cdot -2 \cdot -3 + 0 \cdot -3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2) + (1 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot -2 \cdot 2 + -3 \cdot 0 \cdot -3) - (2 \cdot 1 \cdot -3 + -3 \cdot -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2) + (2 \cdot 1 \cdot -3 + -3 \cdot -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot -3 + -3 \cdot -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2) + (2 \cdot 1 \cdot -3 + -3 \cdot -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot -3 + -3 \cdot -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2)$$

$$(0) - (-4) = 4$$

★★★ 1st: find det. ★★★
 Solving Equations Using Determinates:
 2nd: set equal to solution

1) $\begin{vmatrix} 7 & 2x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$ $28 - 6x = 5$

$-6x = -23$

$x = 23/6$



2) $\begin{vmatrix} x & x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 8$ $(x^2) - (-2x) = 8$

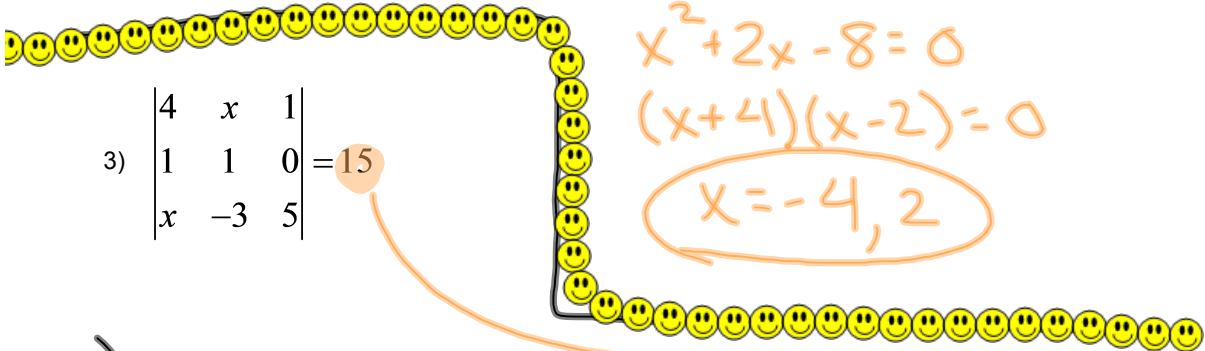
* Quadratic equation.

$x^2 + 2x = 8$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x+4)(x-2) = 0$

$x = -4, 2$



3) $\begin{vmatrix} 4 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -3 & 5 \end{vmatrix} = 15$

#3) $\begin{vmatrix} 4 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ x & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
 $(20 + 0 + -3) - (x + 0 + 5x) + (0 - 1)$

$(17) - (6x) = 15$

$-6x = -2$

$x = 1/3$

★ 1st: find the det.
 ★ 2nd set it equal to 15